

令和元年度
卒業研究報告

研究題目

ひずみミラーの曲面近似
に関する研究

指導教員 由井四海

富山高等専門学校

電子情報工学科

金子真奈

令和2年 2月25日提出

目次

第1章 序章.....	3
1.1 はじめに.....	3
1.2 多重反射セル.....	3
第2章 ひずみミラーの概要.....	4
2.1 解析モデル.....	4
2.2 解析条件.....	5
2.3 解析結果.....	6
第3章 近似.....	9
3.1 近似方法.....	9
3.1.1 最小二乗法.....	10
3.2 曲線及び三次元曲面の近似.....	10
第4章 実験.....	12
4.1 測定点を減らしたときの標準偏差の変化.....	12
4.1.1 標準偏差.....	13
4.1.2 実験方法.....	14
4.1.3 実験結果.....	14
4.2 近似結果と元データとの絶対誤差.....	17
4.2.1 絶対誤差.....	17
4.2.2 実験方法.....	18
4.2.3 実験結果.....	20
4.3 変形前後のミラーの近似式と近似結果.....	24
4.3.1 実験方法.....	24
4.3.2 実験結果.....	24
4.4 接平面の導出.....	25
4.4.1 接平面.....	26

4.4.2 導出結果.....	28
第5章 まとめ	32
謝辞	33
参考文献.....	33

第1章 序章

1.1 はじめに

多重反射セルは微量の気体成分を測定する際に用いられる装置である。この装置を用いて高感度な測定を行うためには、反射回数を多くする必要がある。多重反射セルを構成するミラーに力を加え変形させるとそれがひずむことにより、反射回数が多くなることがある[1]。変形前後の反射回数を図1に示す。

静的線形・非線形解析によって、変形させたミラーの形状点群が計算できるが、このままでは使用することができない。多重反射セルのシミュレーターで任意のミラーでの反射点を計算できるが、そのためにはミラー形状を式で与える必要がある。

本研究では、三次元の点群からミラーの曲面の近似式を求めることを目的とする。さらに、その式から接平面の式を導出する。

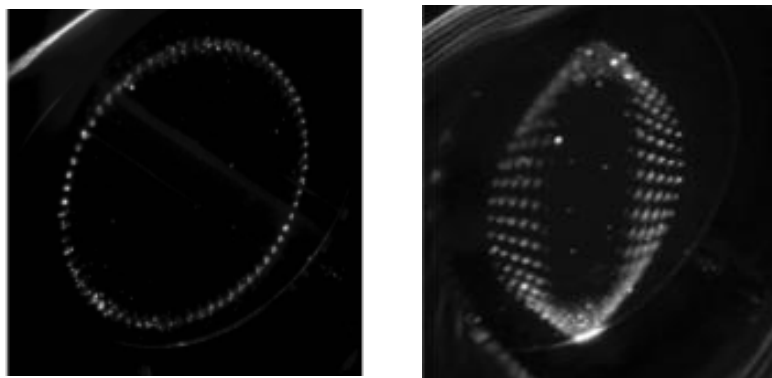


図1 変形前後の反射回数の比較

1.2 多重反射セル

多重反射セルとは、2枚以上のミラーを使用し、光路を多重化することで実効的な光路長

を長くする装置である。多重反射セルには Herriott 型や White 型など様々な種類があり、レーザーを使った気体の吸収分光計測で使われることが多い。光路長を長くすることで、ガスの吸収強度を大きくすることができる[2]。

第2章 ひずみミラーの概要

本研究では、意図的に変形させたミラーの形状点群を使用する。この変形させたミラーを、ひずみミラーと定義する。以下に、ひずみミラーの概要を述べる。

2.1 解析モデル

凹面ミラーのモデル全体図を図 2、ミラーの概要を表 1 に示す。ここで、ミラーの対称性を考慮し、1/4 対称の 3 次元モデルとする。凹面ミラーに約 0.3mm ごとにメッシュを入れることで、ミラー全体の三次元点群は 73×73(各座標-36 から 36)のものを使用する。

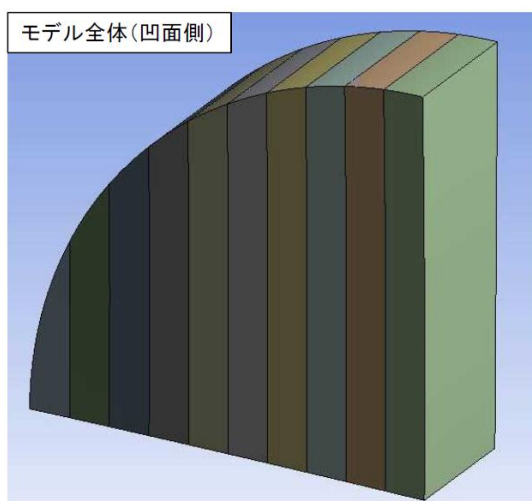


図 2 モデル全体図

表 1 凹面ミラー概要

凹面ミラー概要	
サイズ(径)	φ 75
中心厚	12.0 mm
エッジ厚	12.7 mm
曲率半径	1000 mm
ヤング率	82 Gpa
ポアソン比	0.206

2.2 解析条件

図3に本研究で使用する凹面ミラーの概形を示す。ここで、 z 軸をミラーの深さと定義する。本研究では、凹面ミラーに y 軸方向へ 0.007mm 強制変位させる。このときの x 軸, z 軸方向の変位は 0 としている。また、底面でミラーを固定する(図4参照)。

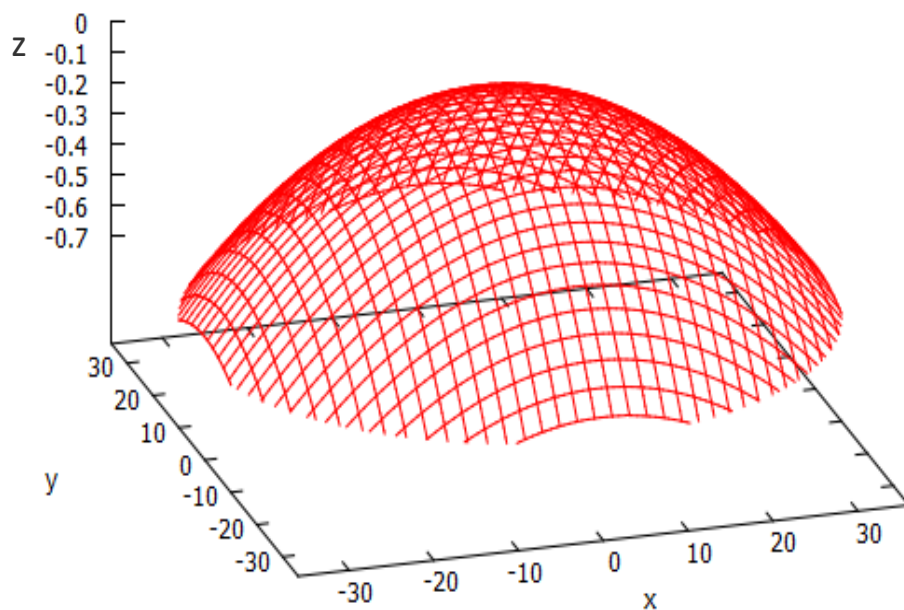


図3 凹面ミラーの概形

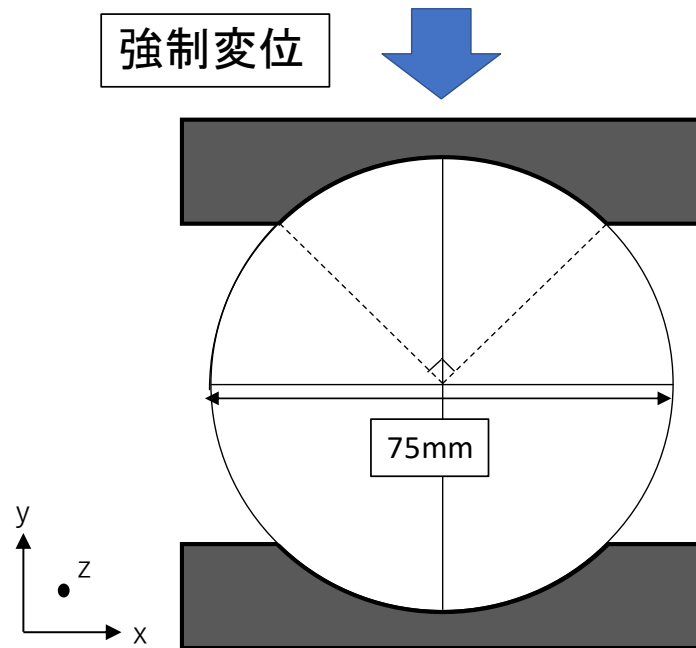


図 4 力の加え方

2.3 解析結果

本解析モデル及び解析条件において、凹面ミラーに発生する変形量は μm オーダーとなった。各軸における変形量分布を図 5 から図 7 に示す。また、変形後と変形前の変化量(Δy)をカラースケールで表示したものを図 8 に示す。変形量は、 $\pm 0.0007\text{mm}$ 以内に収まった。次に、カラースケールより、各軸の中心におけるミラーの変化量を示す(図 9, 図 10 参照)。

赤の線が変形前のミラーの概形、青の線が変形後のミラーの概形を表す。変形後のミラーの概形の端点に着目すると、x 軸の中心における変形後のミラーの概形は、変形前のミラーの概形よりも端点が下がっていることが分かる。また、y 軸の中心における変形後のミラーの概形は、変形前のミラーの概形よりも端点が上がっている。

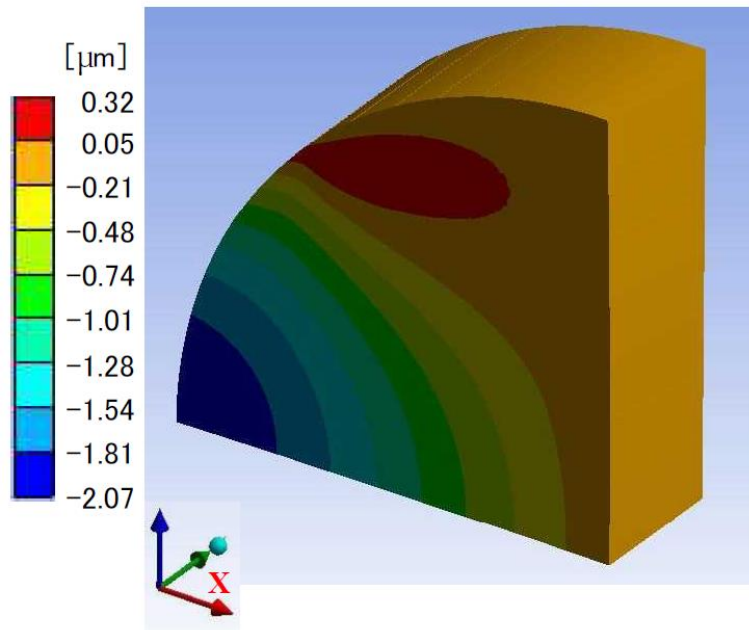


図 5 x 軸方向の変形量分布

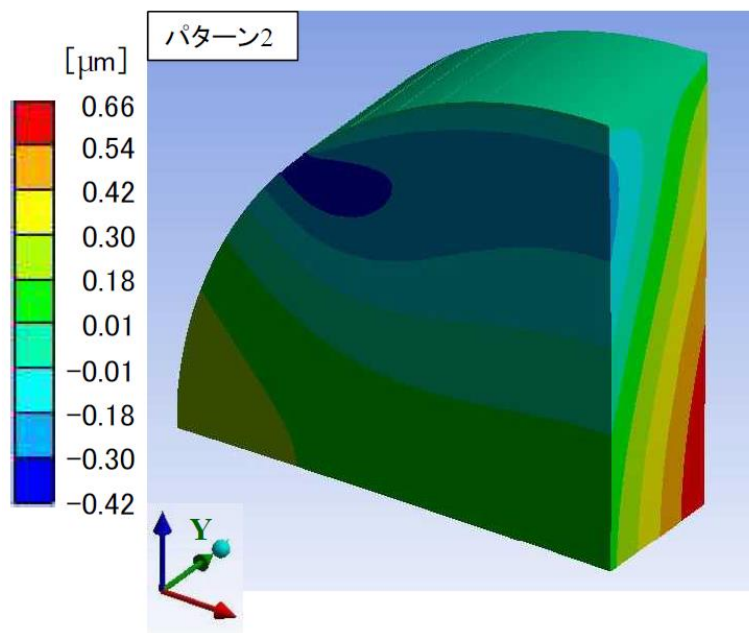


図 6 y 軸方向の変形量分布

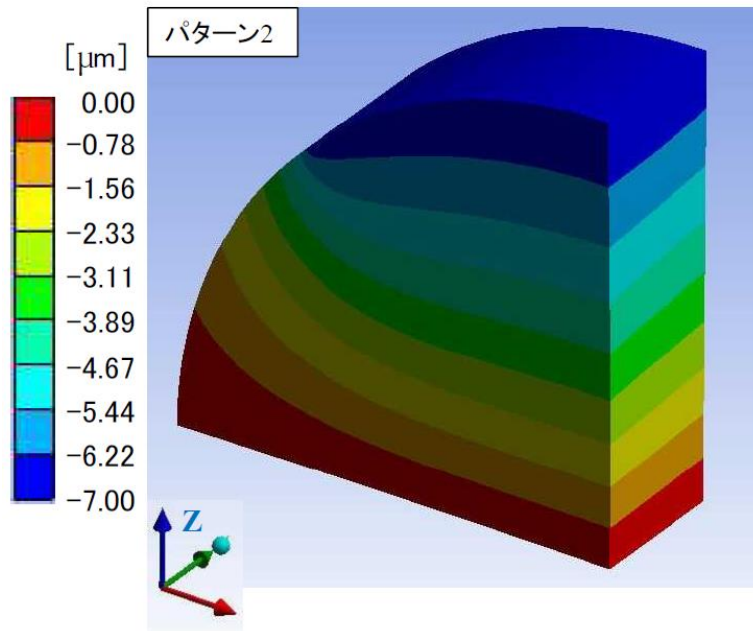


図 7 z 軸方向の変形量分布

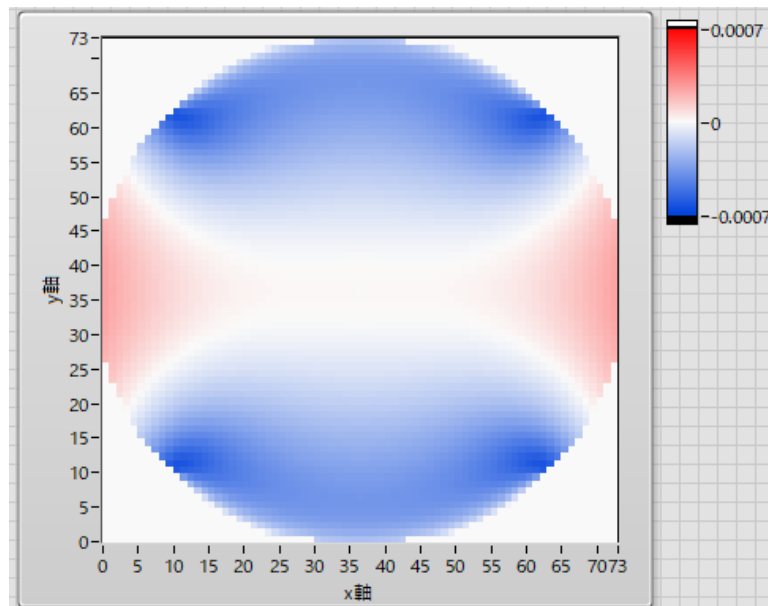


図 8 変形前後の変化量(Δy)

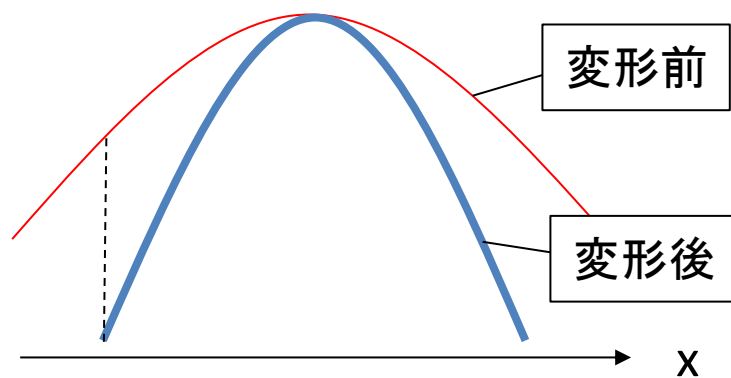


図 9 x 軸の中心におけるミラーの変化量

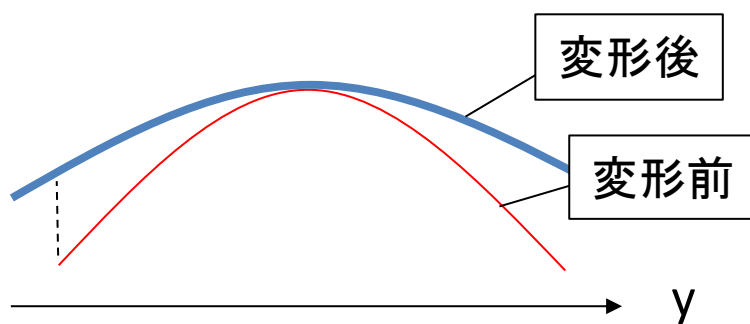


図 10 y 軸の中心におけるミラーの変化量

第3章 近似

本章では、近似方法や処理手順等に関して説明する。

3.1 近似方法

主な近似方法として、代表的なものに最小二乗法やスプライン法などが挙げられる。ここでは最小二乗法について説明する。本研究では、近似するにあたり、この方法を用いた。

3.1.1 最小二乗法

実験結果と理論式を比較する場合、実験結果から得られる値にはある程度の誤差が含まれていることがあり、理論式と一致しないことがある。理論式のグラフは補間点の近くを通っていれば良く、補間点そのものと一致する必要はない。最小二乗法はそのような時に使用される。

式で表すと、誤差の二乗の和 $E(a,b)$ は、

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (3.1.1.1)$$

となる。 (x_i, y_i) は i 番目のデータで、 N はデータの個数である。この誤差が最小になる a と b を探す。式(1)は a にも b にも二次式でその係数は正の値なので最小値がある。誤差 E の最小値は、それぞれの偏微分した値が 0 となるときに得ることができる。

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial b} = -\sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) = 0 \quad (3.1.1.2)$$

これは、 a と b の連立方程式である。すなわち、

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i + nb = \sum_{i=1}^N y_i \end{cases} \quad (3.1.1.3)$$

である。これを解くと

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (3.1.1.4)$$

となる[3]。

3.2 曲線及び三次元曲面の近似

三次元曲面を近似するにあたり、三次元曲面を曲線の集合と考える。凹面ミラーの三次元

データを 3d グラフで表したものを図 11 に示す。今回の実験で曲線の方程式は、 $z = ay^2 + by + c$ の形で表すことができる。 a, b, c の値は、抽出する座標によって異なる。ここで a, b, c をそれぞれ $d_n x^2 + e_n x + f_n$ で与える。 a, b, c は x 座標に依存するため、三次元曲面の近似式は、

$$z = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (3.2.1)$$

となる。ここでの計算及び、以降の計算は python を用いて行う。

x 軸方向の座標における曲線の処理手順を説明する。例として図 11 の yz 平面の位置における曲線データの抽出方法について説明する。このときの曲線データは、 yz 平面の x 座標のライン上の、 y 軸の各座標のデータを読み取ることで抽出することができる(図 12 参照)。この方法を用いて x 軸の各座標での曲線データを抽出し、曲線の近似式を求める。近似式内の a, b, c の値は曲線の x 座標に依存するため、 $a(x), b(x), c(x)$ となり、(1)に代入することで三次元曲面の近似式が得られる。 y 軸方向においても同様の内容を行い、近似式を求める。 y 軸方向における曲線から得た近似式内の a, b, c の値は、曲線の y 座標に依存するため、 $a(y), b(y), c(y)$ となる。よって、三次元曲面の近似式は

$$z = a(y)x^2 + b(y)x + c(y) \quad (3.2.2)$$

となる。

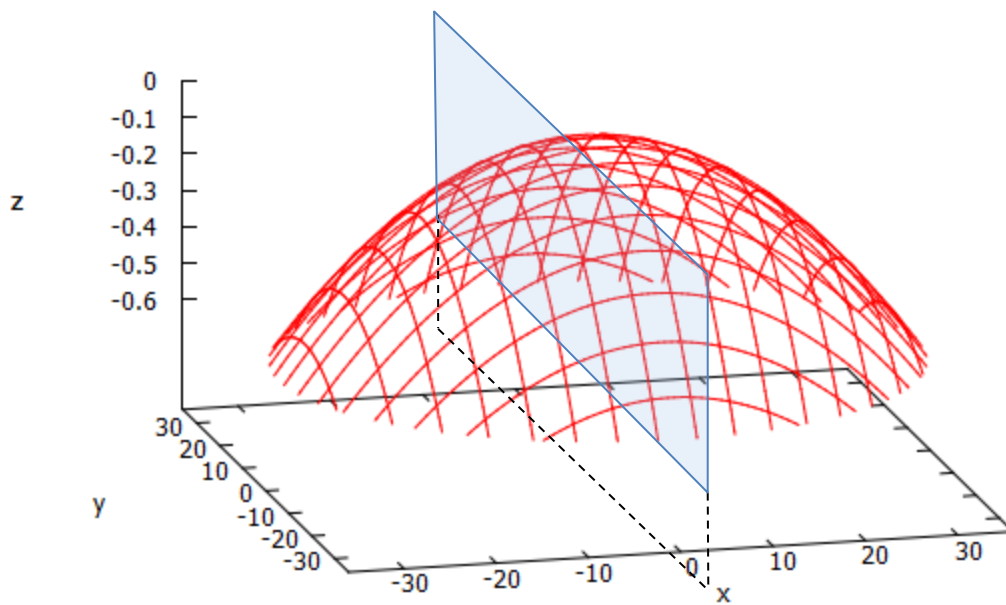


図 11 凹面ミラーの概形と任意の座標における yz 平面

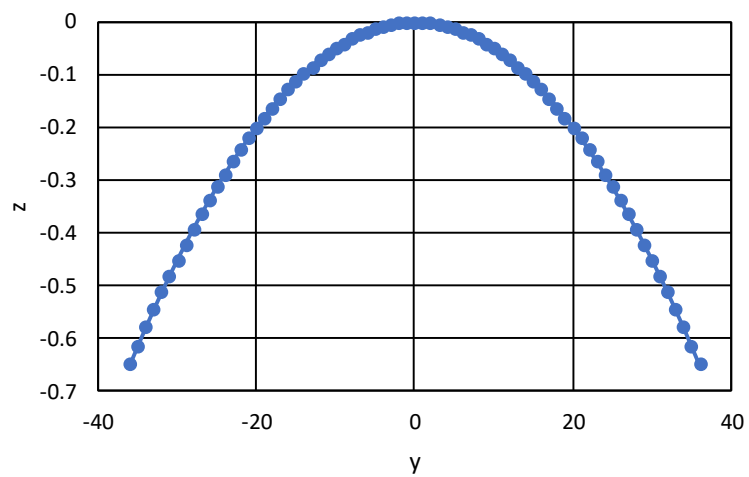


図 12 任意の座標の yz 平面における曲線

第4章 実験

4.1 測定点を減らしたときの標準偏差の変化

本研究で扱う三次元データは、ミラーの中心を 0 として発展させたものを使用している。

曲線は最大で 73 個のデータで構成されている。データ数が多いため、測定点を減らしたときの近似への影響を確認した。

4.1.1 標準偏差

確率変数 X が大体どの程度の範囲にあるのかを示すために使われる量 σ^2 を分散といい、次の式で定義する。

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) = (x_1 - \mu)^2 f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 f(x_2) + \dots \\ \quad + (x_n - \mu)^2 f(x_n) & \text{(離散的なとき) (4.1.1.1)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx & \text{(連続的なとき) (4.1.1.2)} \end{cases}$$

また、分散の平方根をとったもの、すなわち σ を、標準偏差という。分散は「平均からの距離の 2 乗」の平均であるから、その平方根である標準偏差は、分布が平均からどれくらいの幅にあるのかを示すめやすになっていると考えられる。

分散または標準偏差が大きいときには、その分布のばらつきの程度は大きく、小さいときは、分布はほとんど平均値のまわりに密集している[4]。

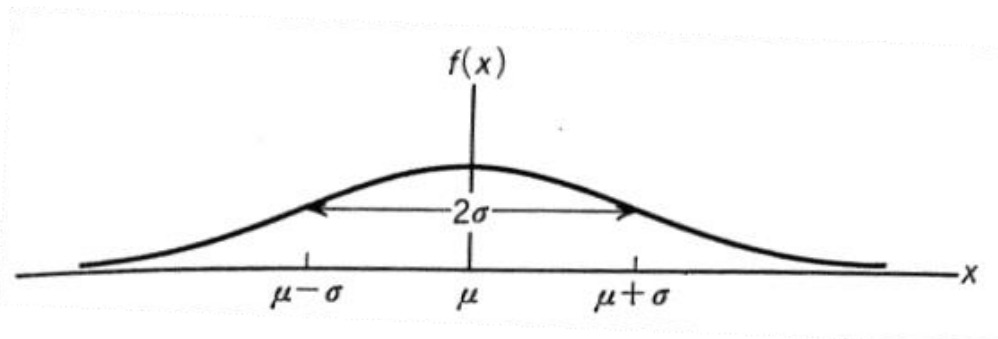


図 13 σ が大きいときの分散、標準偏差とばらつきの程度

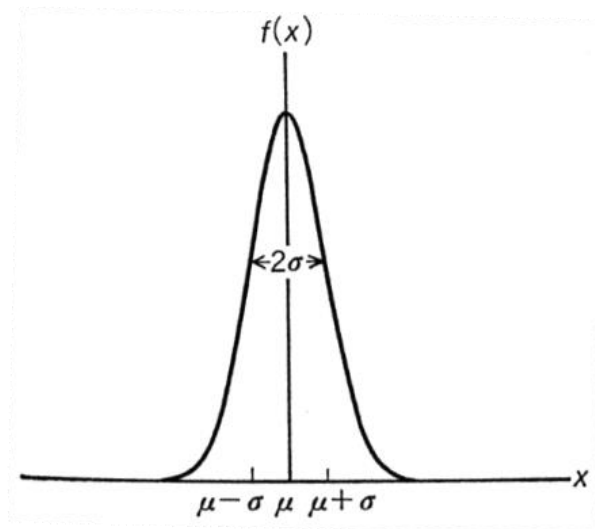


図 14 σ が小さいときの分散、標準偏差とばらつきの程度

4.1.2 実験方法

曲線は、最大で 73 個の点で構成される。ここで、 $x=0$ の曲線と $y=0$ の曲線は 73 個の点で構成されるため、本実験ではこの 2 つの座標から得られる曲線を用いて実験を行う。まず 73 個の点から 5,9,13,25,37 点を抽出し、それぞれのデータ数で構成される曲線の近似式を求める。曲線の近似式から、さらに三次元曲面の近似式を導出する。次に近似式から得たデータと元データとの誤差を計算し、その標準偏差を求める。このときの許容誤差は $\pm 10\%$ とした。

4.1.3 実験結果

三次元曲面の近似を行う前に曲線の近似で実験を行った。 x 軸方向の曲線の近似を行うときのデータ数と標準偏差を図 15 に示す。また、 y 軸方向の曲線の近似を行うときのデータ数と標準偏差を図 16 に示す。赤の帯域は許容誤差の範囲を表す。

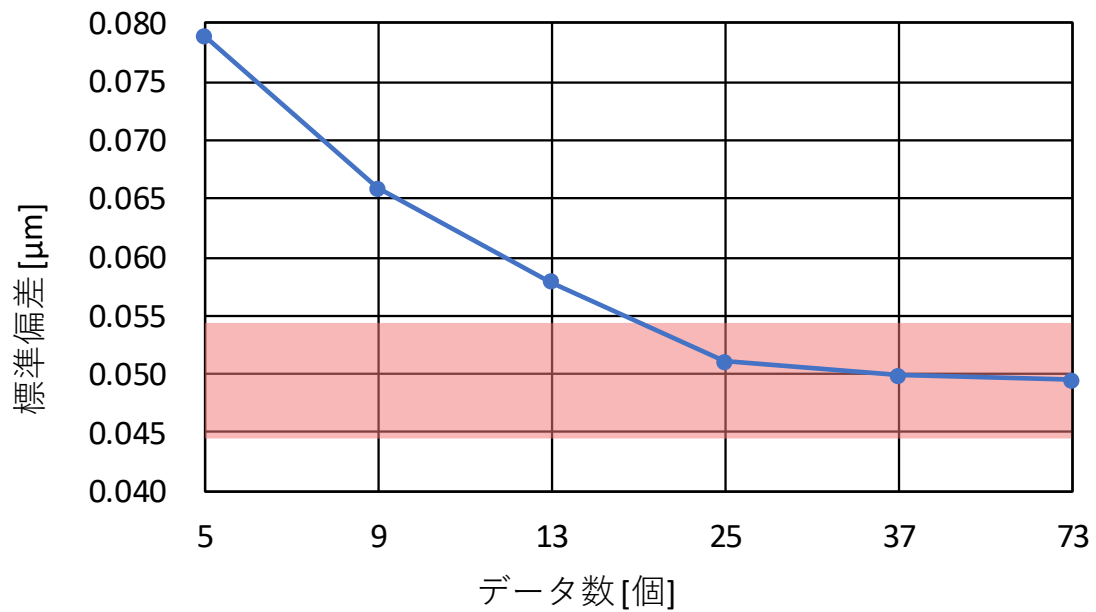


図 15 x 軸方向曲線から得た近似式のデータ数と標準偏差

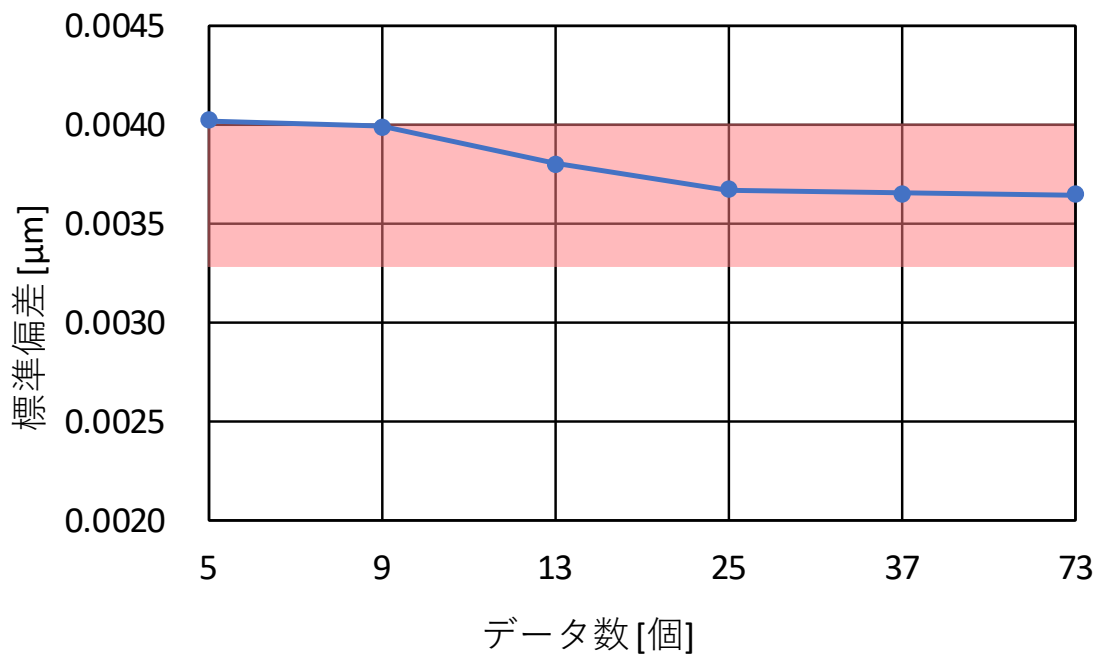


図 16 y 軸方向曲線から得た近似式のデータ数と標準偏差

x 軸方向の曲線から得た近似式を求めるためのデータ数に着目すると、13 点に減らしたときに急激に標準偏差の値が大きくなっていることが分かる。また、13 点に減らすと標準

偏差の値は許容範囲内ではなくなるため、25 点までであれば測定点を減らしても近似に影響がないと考える。

続いて y 軸方向の曲線から得た近似式を求めるためのデータ数に着目すると、9 点にまで減らしても許容範囲内にある。しかし、x 軸方向のときと同様に測定点を 13 点に減らしたときから急激に標準偏差が大きくなっていることが分かる。

この結果より、全データである 73 点を扱う場合と、データ数を 25 点に減らした場合はデータのばらつきに差がないため、近似に影響がないと考える。

同様に三次元曲面においても実験を行った。x 軸方向の曲線より三次元曲面の近似式を求めるためのデータ数と標準偏差を図 17 に示す。また、y 軸方向の曲面より三次元曲面の近似式を求めるためのデータ数と標準偏差を図 18 に示す。

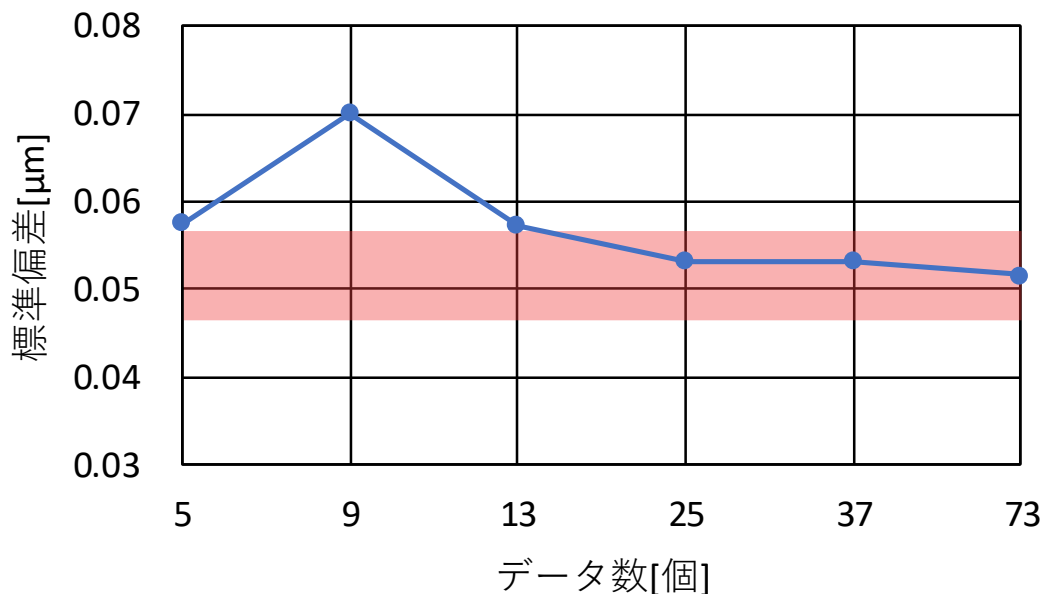


図 17 x 軸方向の曲線から得た三次元曲面の近似式のデータ数と標準偏差

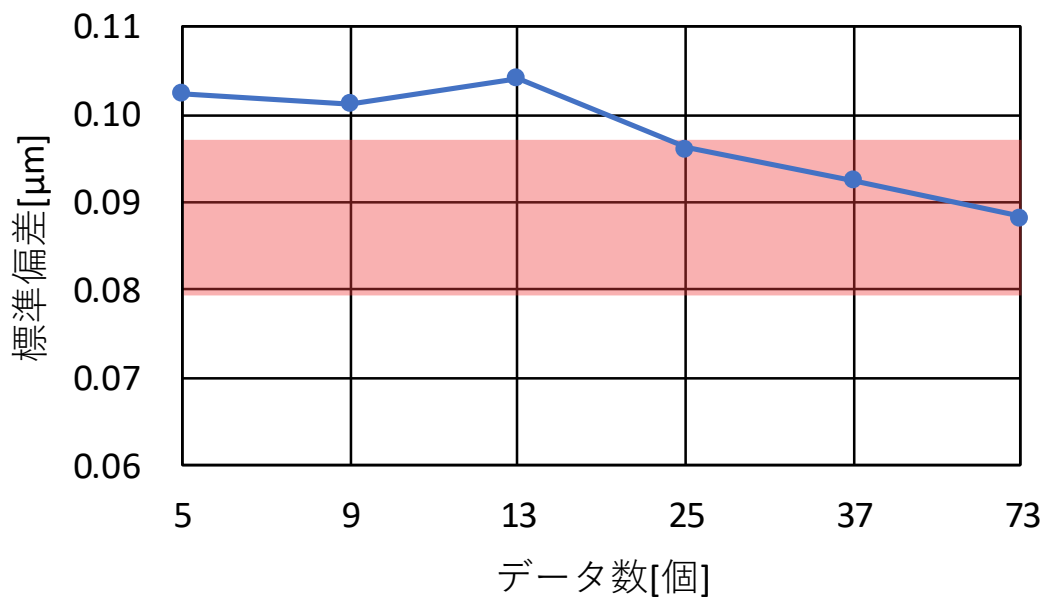


図 18 y 軸方向曲線から得た三次元曲面の近似式のデータ数と標準偏差

x 軸方向の曲線から得た三次元曲面の近似式における結果では、25 点に減らしても標準偏差の値はほぼ等しく、曲線のと看と同様の結果が得られた。しかし、y 軸方向の曲線から得た三次元曲面の近似式における結果では曲線のと看と異なり、25 点に減らしたときは許容範囲内だがそれ以降は許容範囲外となった。この結果より、以降は 25 点を抽出して近似を行うこととする。

4.2 近似結果と元データとの絶対誤差

本実験では、各軸方向の曲線から得られる近似式から得たデータと元データとの絶対誤差を比較する。誤差の程度を確認することを目的とする。

4.2.1 絶対誤差

数値計算では有限桁の数値だけを取り扱うので、必ずといってよいほど誤差が生じる。数

値計算の結果生じた誤差が、真の数値と比べて無視できないほど大きくなると、数値計算の結果は信頼できなくなる。

ある数の真の値を a とし、その近似値を x とする。このとき、

$$e = x - a \quad (4.2.1.1)$$

を誤差という。誤差の絶対値 $|e| = |x - a|$ を絶対誤差という [5]。

4.2.2 実験方法

4.1 の実験同様、曲線と三次元曲面においてそれぞれ実験を行った。曲線データから得られる近似式と元データとの絶対誤差を求めるための方法を説明する。4.1 の実験より、測定点の数は 25 個とする。抽出した曲線データから得た近似式に各座標の値(-36 から 36)を代入し、その結果と元データとの絶対誤差を求める。三次元曲面における実験方法も同様である。

三次元曲面における実験では、結果を二次元グラフで表すために、近似式と元データの絶対誤差を求めた後に x 軸方向、 y 軸方向の平均を求めた(図 19,図 20 参照)。

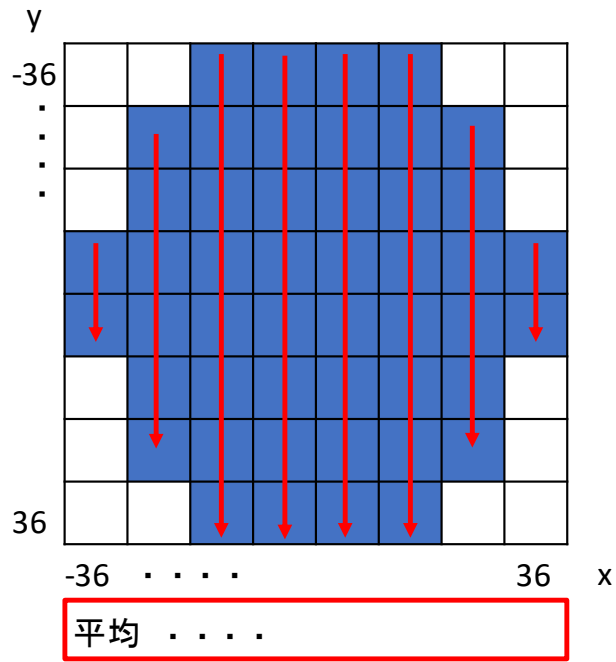


図 19 x 軸方向の平均

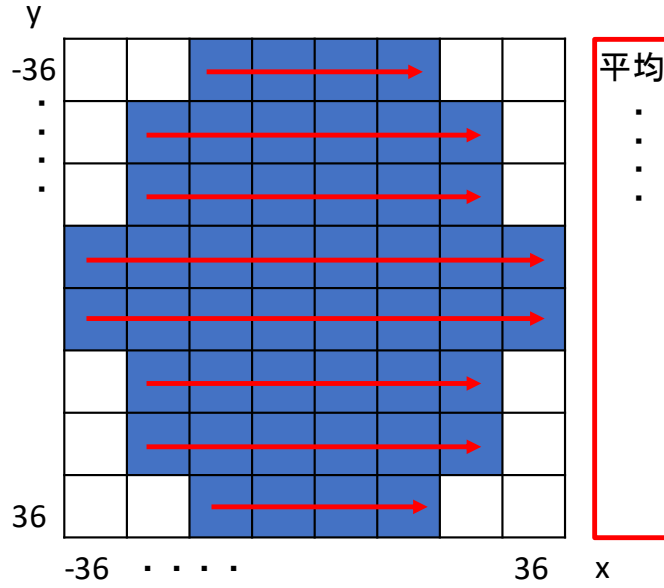


図 20 y 軸方向の平均

4.2.3 実験結果

x 軸方向の曲線の近似式と元データとの絶対誤差を図 21 に示す。また、y 軸方向の曲線の近似式と元データとの絶対誤差を図 22 に示す。グラフの概形は、どちらの結果も中心以外ではほぼ同じである。中心においては、x 軸方向の絶対誤差では周りの点よりも小さいが、y 軸方向の絶対誤差は端点と同じ程大きくなっている。x 軸方向の曲線の近似式から得られる絶対誤差の値が、y 軸方向の曲線の近似式から得られる絶対誤差よりも大きいことが分かる。

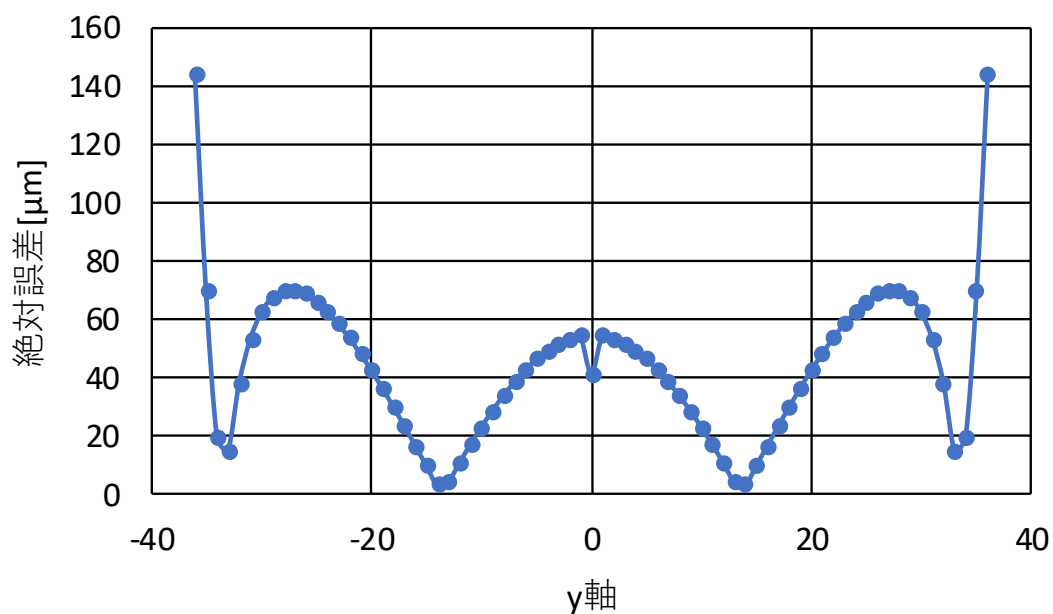


図 21 x 軸方向の曲線における近似結果と元データの絶対誤差

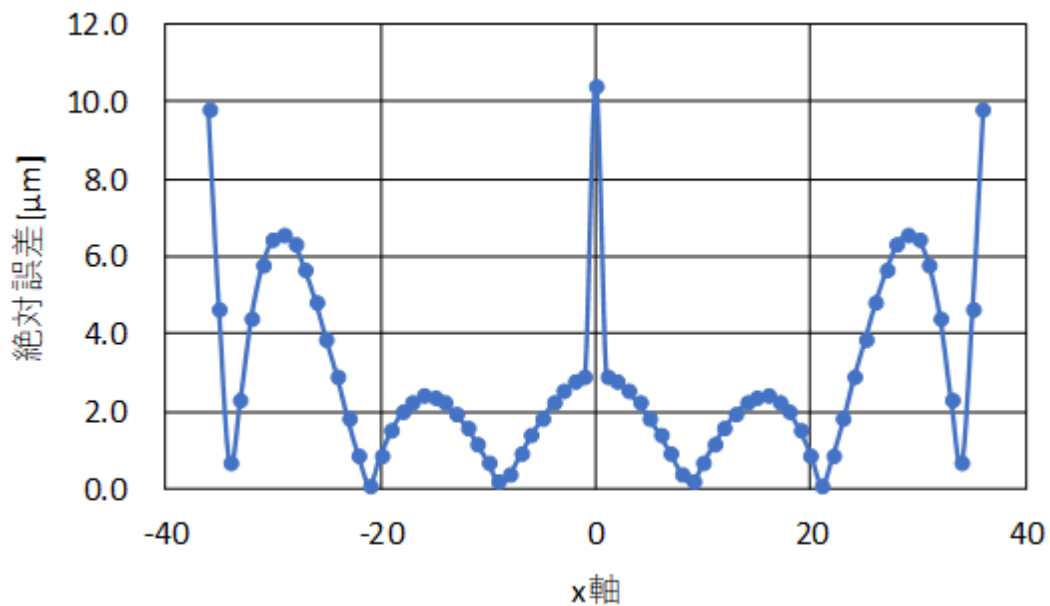


図 22 y 軸方向の曲線における近似結果と元データの絶対誤差

三次元曲面において同様の実験を行った。x 軸方向の三次元曲面の近似結果と元データとの絶対誤差を、各軸方向に平均をとったときのグラフを図 23 に示す。同様に、y 軸方向の三次元曲面の近似結果と元データとの絶対誤差を、各軸方向に平均をとったときのグラフを図 24 に示す。どちらの方向に平均をとった場合でも y 軸方向の曲線から求めた近似結果の方が絶対誤差が大きいことが分かる。

曲線と三次元曲面の近似結果と元データとの絶対誤差を比較する。それぞれのグラフの概形は一致していることが分かる。しかし、曲線での絶対誤差では x 軸方向の曲線から求める近似式と元データとの絶対誤差よりも y 軸方向の曲線から求める近似式と元データとの絶対誤差の方が絶対誤差の値が小さいが、三次元曲面では y 軸方向の曲面から得られる絶対誤差の方が全体的に誤差が大きくなった。

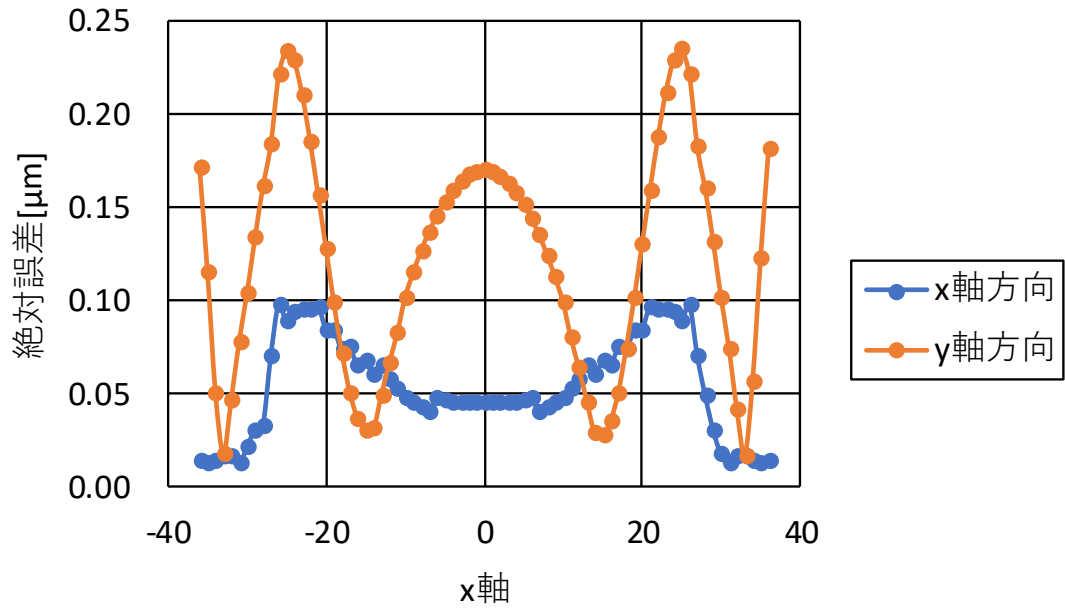


図 23 各軸方向の絶対誤差の平均

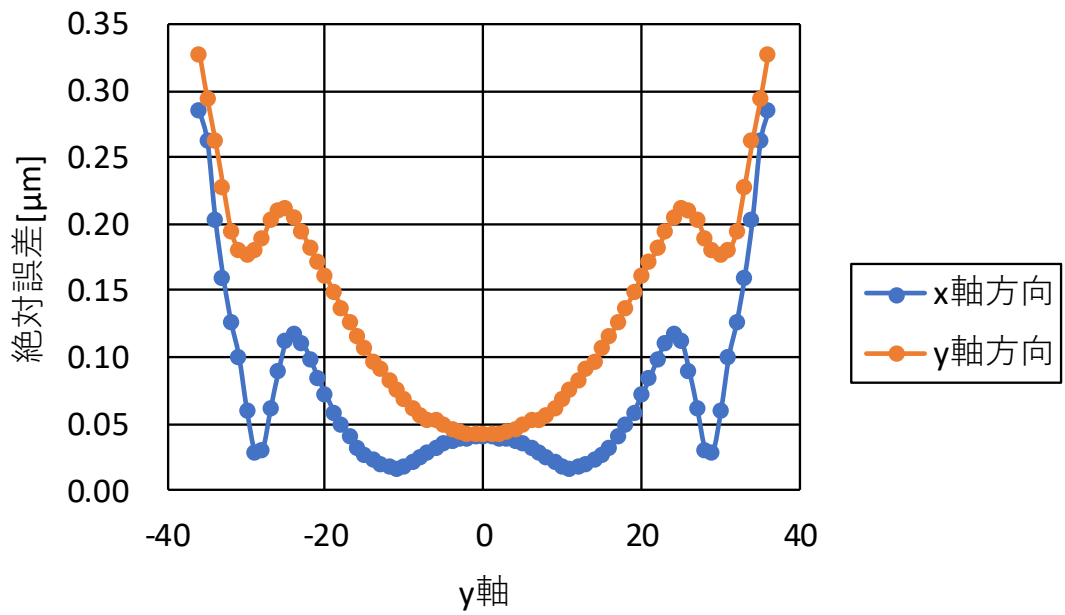


図 24 各軸方向の絶対誤差の平均

三次元データで絶対誤差を可視化するため、グラフィック型言語によってプログラミングすることのできる開発環境であり、主に計測用に用いられるソフトウェアである

Labview を用いてカラースケールで表示した。x 軸方向の曲線から得られる三次元曲面の近似結果と元データの誤差を図 25,y 軸方向の曲線から得られる三次元曲面の近似結果と元データとの誤差を図 26 に示す。x 軸方向の曲線から得られた結果と元データとの誤差は、 $\pm 0.0005\text{mm}$ 以内に収まり、y 軸方向の曲線から得られた結果と元データとの誤差は、 $\pm 0.0006\text{mm}$ 以内に収まった。この結果から、x 軸方向の曲線から得られる三次元曲面の近似結果と元データとの誤差の方が小さいことが分かる。よって、誤差の大きさに観点を置くと、x 軸方向の曲線から式を求める方が、ミラー曲面にあった近似式が得られると考える。

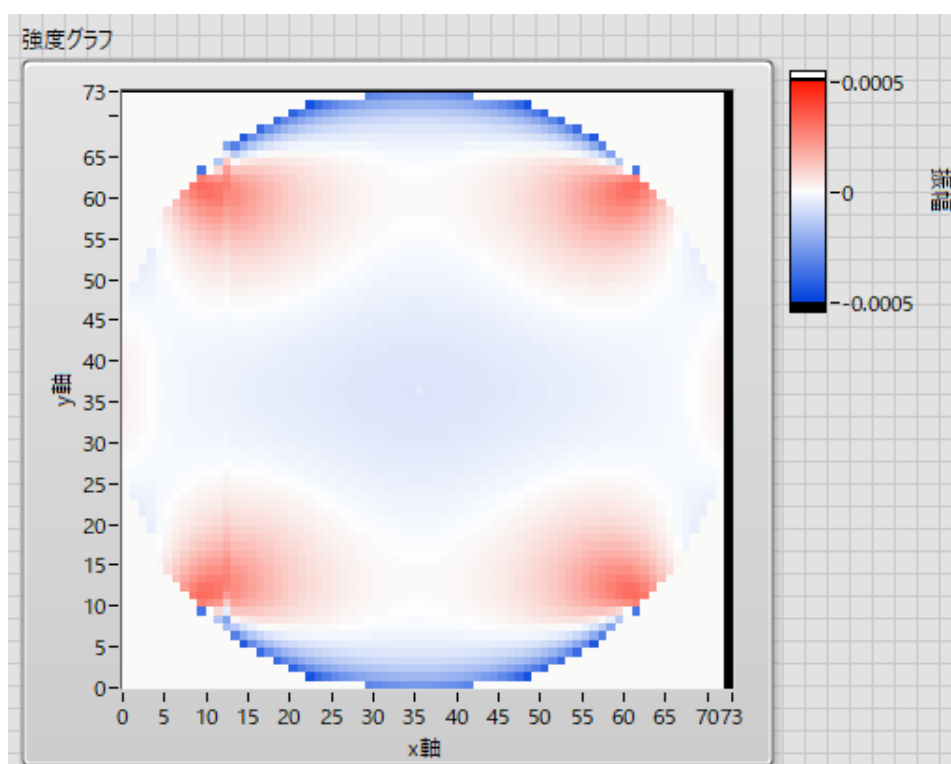


図 25 x 軸方向の三次元曲面の近似結果と元データとの絶対誤差

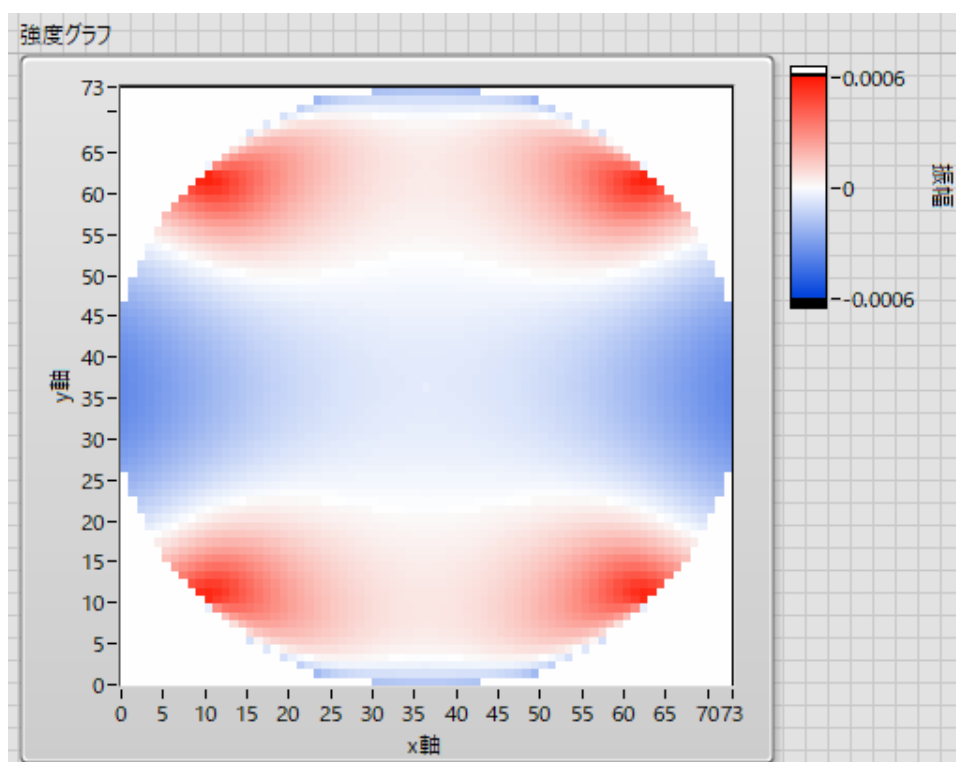


図 26 y 軸方向の三次元曲面の近似結果と元データとの絶対誤差

4.3 変形前後のミラーの近似式と近似結果

求めた近似式が、変形後のミラー概形に沿っているかを確認した。ここでは、x 軸方向の三次元曲面の近似結果を使用する。

4.3.1 実験方法

変形前と変形後の $x=0$ のときの曲線データと、近似結果から得られる三次元曲面の近似結果における $x=0$ のときの曲線データの絶対誤差をそれぞれ求める。絶対誤差が 0 に近いほど、ミラーの概形に沿った近似を行うことができたと言える。

4.3.2 実験結果

図 27 に実験結果のグラフを示す。変形前と近似結果の絶対誤差と比較して、変形後と近

似結果の絶対誤差は、変形前と近似結果の絶対誤差よりもほとんどの座標において小さいことが分かる。この結果から、近似結果は変形後のミラーの概形に沿っていると言える。

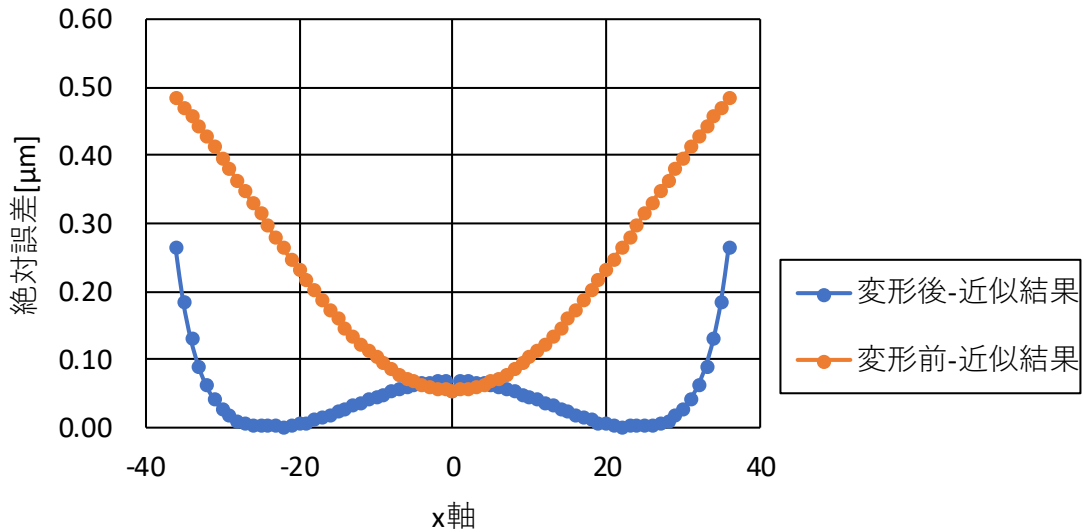


図 27 変形前後と近似結果の絶対誤差

4.4 接平面の導出

25 点を抽出したときの曲線データから得られた三次元曲面の近似式より、接平面の式を求めた。接平面を導出することで、法線ベクトルを求められる。ここで求める接平面は、ミラーに入射した光が任意の座標に当たって反射したときの反射方向を決める際の平面になる(図 28 参照)。

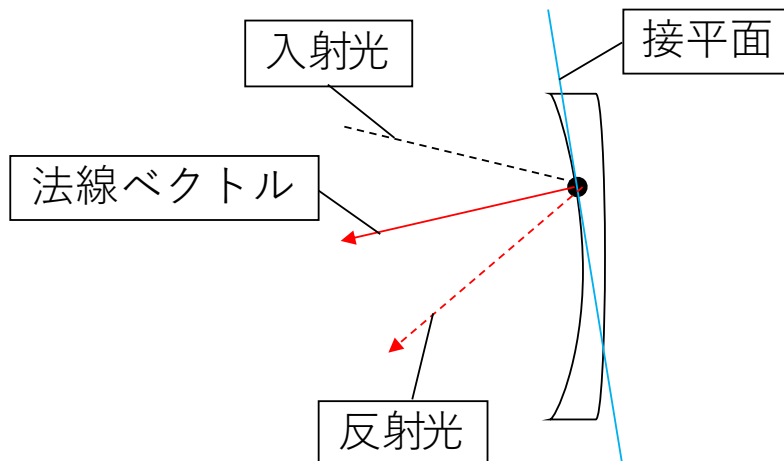


図 28 法線ベクトル及び反射方向

4.4.1 接平面

1 変数関数 $y = f(x)$ が $y = a$ で微分可能であるとき、 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $P(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ である。このとき、 $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} &= \frac{f(x) - \{f'(a)(x - a) + f(a)\}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} - f'(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。逆に、連続な関数 $y = f(x)$ に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0, \quad g(a) = f(a) \quad (4.4.1.1)$$

を満たす 1 次関数 $g(x)$ が存在するとき、 $y = f(x)$ は $x = a$ で微分可能で、 $g(x) =$

$f'(a)(x - a) + f(a)$ となることを証明することができる。

そこで、1 変数関数の微分可能性と接線に対応する 2 変数関数の概念として、全微分可能性と接平面を、(4.4.1.1)に対応する形で次のように定める。

点(a,b)で連続な関数 $z=f(x,y)$ に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} \frac{f(x,y) - g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0, \quad g(a,b) = f(a,b) \quad (4.4.1.2)$$

を満たす 1 次関数 $g(x,y)$ が存在するとき、 $z=f(x,y)$ は点(a,b)で全微分可能であるといい、平面 $z=g(x,y)$ を $z=f(x,y)$ の点(a,b, $f(a,b)$)における接平面という(図 29 参照)。

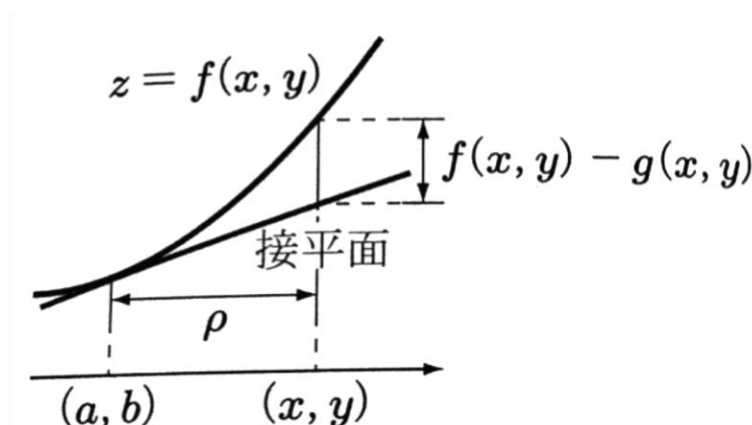


図 29 接平面

点(a,b)のまわりで偏微分可能で、偏導関数が連続な関数 $z=f(x,y)$ は、点(a,b)で全微分可能であることが知られている。

$z=f(x,y)$ が全微分可能であるとき、接平面の方程式を求める。

(4.4.1.2)で、 $g(x,y) = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b)$ (A,B は定数)とおくと、

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} \left\{ \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - Ah}{\sqrt{h^2}} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{|h|} \left\{ \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - A \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、h の符号にかかわらず

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b)$$

が成り立つ。同様にして、 $B=f_y(a, b)$ が得られる。このことは、 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であれば、 $f(x,y)$ は (a,b) で偏微分可能であり、

$$g(x, y) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

であることを示している。

よって、 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるとき、点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) \quad (4.4.1.3)$$

である[6]。

4.4.2 導出結果

x 軸方向の曲線から 25 点を抽出したときのひずみミラーの近似式は

$$z(x, y) = \{(-5.20 \times 10^{-10})x^2 - 5.00 \times 10^{-4}\}y^2 + \{(-7.84 \times 10^{-22})x^2 + 5.57 \times 10^{-19}\} \\ + \{(-5.00 \times 10^{-4})x^2 + (2.17 \times 10^{-19})x - 5.41 \times 10^{-5}\}$$

となった。この式から(4.4.1.3)を用いて接平面の式を求める。接平面を求めるにあたり、任意の座標を設定する必要がある。今回は $(x,y)=(0,0)$ のときと $(x,y)=(10,10)$ における接平面を求めた。

まず、 $(x,y)=(0,0)$ のときの結果について述べる。接平面の式は

$$f(x, y) = (2.17 \times 10^{-19})x + \{(-7.83 \times 10^{-22})x^2 + (5.57 \times 10^{-19})\}y - 5.41 \times 10^{-5}$$

となった。近似結果と接平面を 3d グラフで表したものを図 30 に示す。

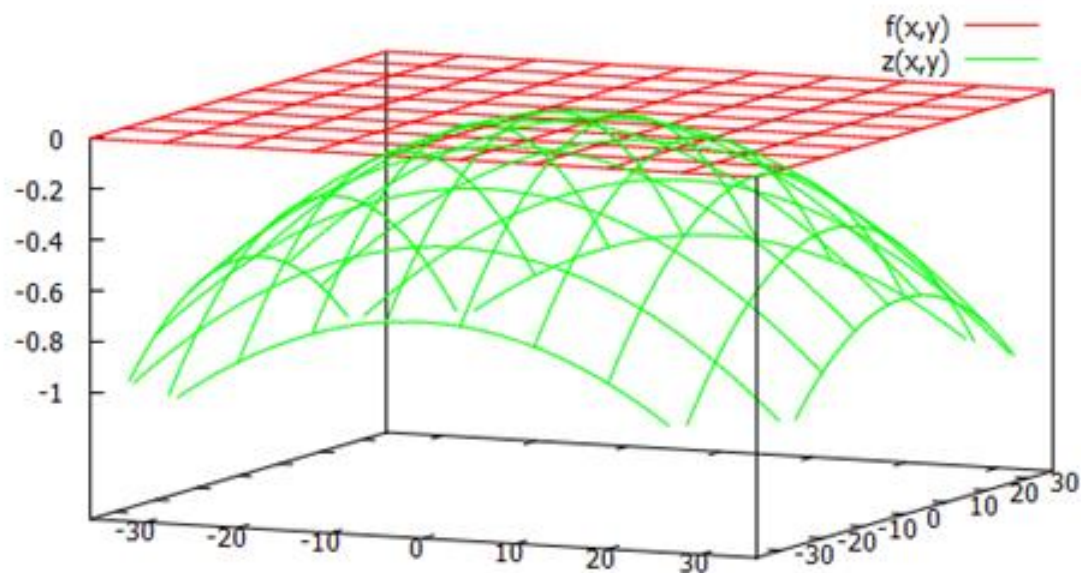


図 30 ひずみミラーの近似結果と $(x,y)=(0,0)$ における接平面

次に、 $(x,y)=(10,10)$ のときの結果について述べる。接平面の式は

$$f(x,y) = (x - 10)\{(-1.04 \times 10^{-8})y^2 - (1.57 \times 10^{-20})y - 0.0100\} \\ + (y - 10)\{(-1.04 \times 10^{-8})x^2 - 0.0100\} - 0.100$$

となった。近似結果と接平面を 3d グラフで表したものを図 31 に示す。

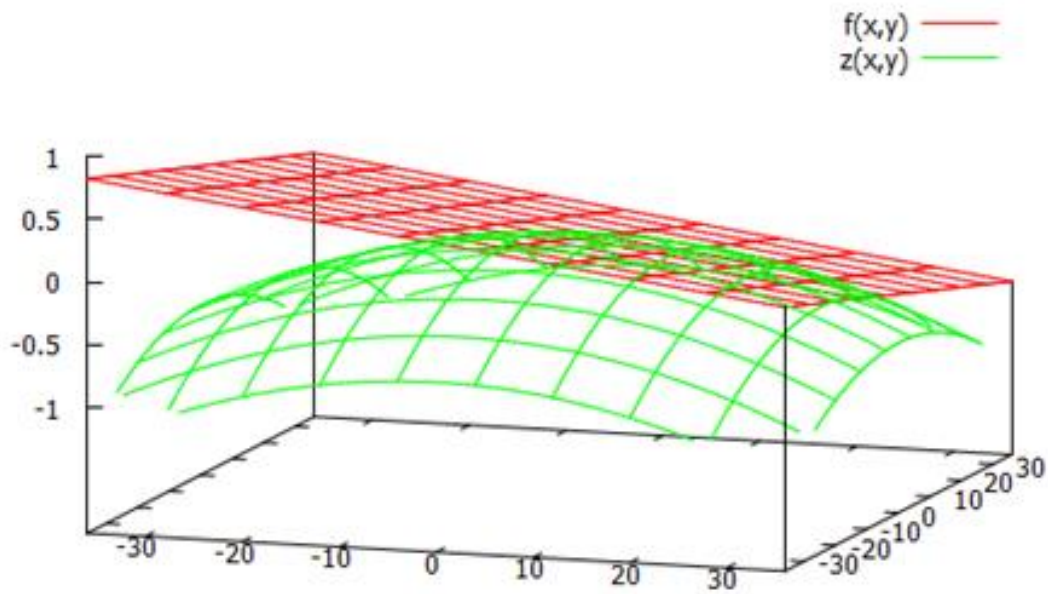


図 31 ひずみミラーの近似結果と(x,y)=(10,10)における接平面

同様に、y 軸方向の曲線の近似式から接平面の式を求めた。y 軸方向の曲線から 25 点を抽出したときのひずみミラーの近似式は

$$\begin{aligned}
 z(x,y) = & \{(4.38 \times 10^{-10})y^2 + 6.21 \times 10^{-10}y - 5.00 \times 10^{-4}\}x^2 \\
 & + \{(1.34 \times 10^{-20})y^2 - 4.10 \times 10^{-19}y - 1.44 \times 10^{-18}\}x \\
 & + \{(-5.00 \times 10^{-4})y^2 - (1.45 \times 10^{-7})y - 5.15 \times 10^{-5}\}
 \end{aligned}$$

となった。この式から接平面の式を求める。x 軸のときと同様に、(x,y)=(0,0)のときと (x,y)=(10,10)における接平面を求めた。

まず、(x,y)=(0,0)のときの結果について述べる。接平面の式は

$$\begin{aligned}
 f(x,y) = & \{(1.34 \times 10^{-20})y^2 + (-4.10 \times 10^{-19})y + (-1.44 \times 10^{-18})\}x \\
 & + \{(6.21 \times 10^{-10})x^2 + (-4.10 \times 10^{-19})x + (-1.45 \times 10^{-7})\}y - 5.15 \times 10^{-5}
 \end{aligned}$$

となった。近似結果と接平面を 3d グラフで表したものを図 32 に示す。

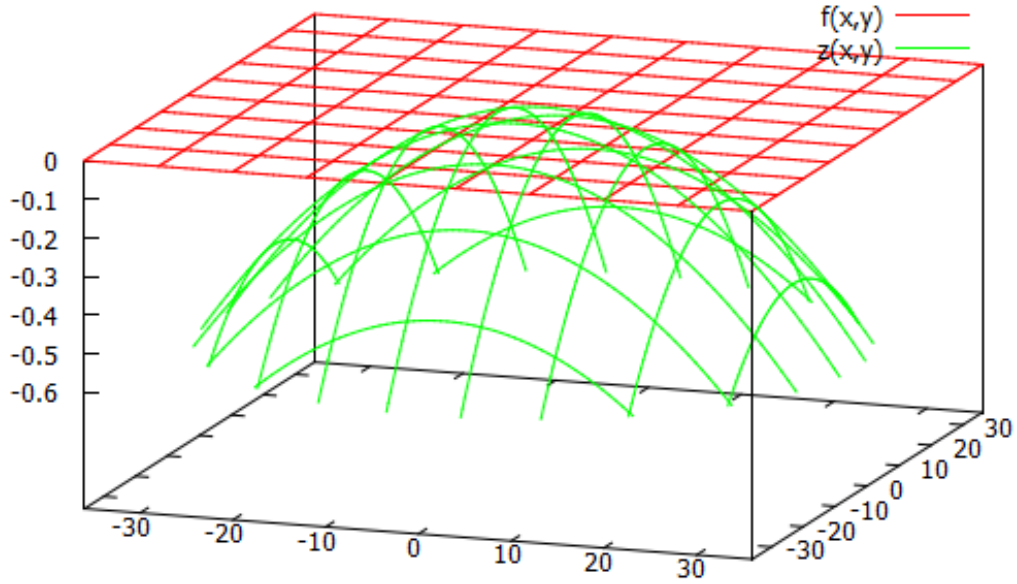


図 32 ひずみミラーの近似結果と $(x,y)=(0,0)$ における接平面

次に、 $(x,y)=(10,10)$ のときの結果について述べる。接平面の式は

$$f(x,y) = (x - 10)\{(8.75 \times 10^{-9})y^2 + (1.24 \times 10^{-8})y - 0.0100\} \\ + (y - 10)\{(9.37 \times 10^{-9})x^2 + (-1.42 \times 10^{-19})x - 0.0100\} - 0.100$$

となった。近似結果と接平面を 3d グラフで表したものを図 33 に示す。

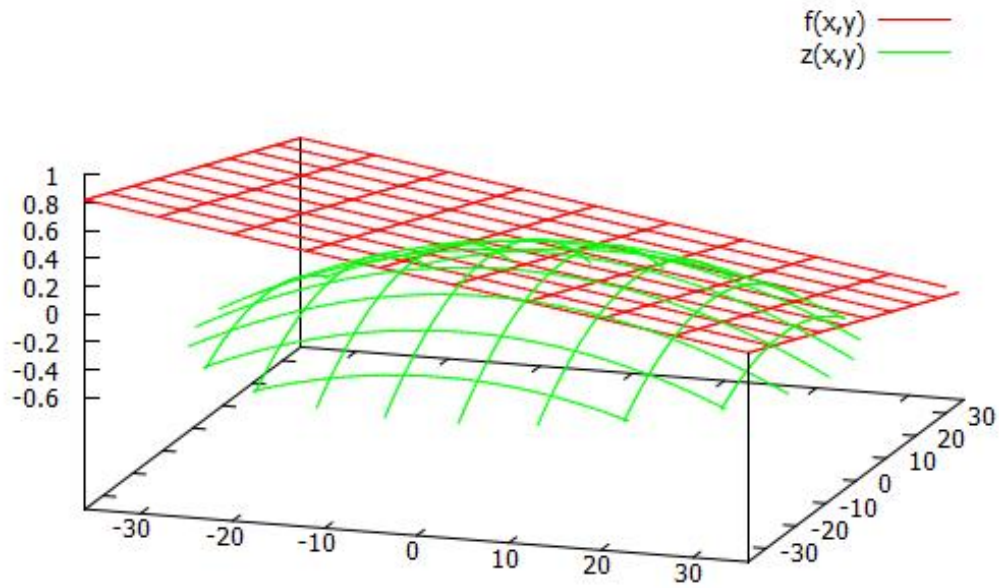


図 33 ひずみミラーの近似結果と $(x,y)=(10,10)$ における接平面

第5章 まとめ

凹面ミラーの形状を式で与えることで、任意のミラーでの反射を計算することができる。

最小二乗法を用いて、三次元点群から凹面ミラーの曲面の近似式を求めた。

全ての座標における近似結果と元データの誤差の標準偏差を求めた結果、抽出する曲線の数を 73 個から 25 個に減らしても標準偏差の値は $\pm 10\%$ 以内に収まった。

近似結果と元データの絶対誤差の平均は、縦方向に平均した結果は $0.25\mu\text{m}$ 、横方向に平均した結果は $0.35\mu\text{m}$ 以内に収まった。三次元曲面全体の誤差の大きさは x 軸方向の近似式を求める方が小さくなった。

近似式から任意の座標における接平面の式を導出した。

謝辞

本研究を通して 1 年間ご指導ならびに様々な経験をする機会を与えていただきました。

国立富山高等専門学校、由井四海准教授、由井研究室の専攻科生及び本科 5 年生に尽きせぬ深謝の念を捧げます。

参考文献

[1]多重反射容器 特開 2016-121905(JP,A)

[2]原和希 半導体レーザーを用いたマルチパスセル内の光路長測定

富山高等専門学校電子情報工学科 2018 年

[3]山本昌志 補間法と最小二乗法

http://yamamo10.jp/yamamoto/lecture/2007/5E_comp_app/interpolation/interpolation.pdf

[4]薩摩順吉 確率・統計 岩波書店 2002

[5]川上一郎 数値計算 岩波書店 1996

[6]上野健爾 微分積分 2 森北出版株式会社 2016